

Streszczenie

Od połowy XX wieku metoda elementów skończonych jest przedmiotem niesłabnącego zainteresowania naukowców i inżynierów. Najczęściej poszukuje się pola przemieszczeń wykorzystując zasadę minimum energii potencjalnej układu. Pomimo wielu zastosowań tego podejścia należy również poszukiwać innych rodzajów sformułowania problemu, które pozwolą uniknąć niedoskonałości metody przemieszczeniowej i umożliwią osiągnięcie rozwiązania mającego pożądane cechy. Interesującą alternatywą jest ujęcie naprężeniowe, w którym rolę stopni swobody odgrywają naprężenia lub wielkości z nimi związane. Jest to podejście rzadziej stosowane, ponieważ konstruowanie statycznie dopuszczalnego pola naprężeń sprawia większe trudności niż budowa kinematycznie dopuszczalnego pola przemieszczeń. Niemniej jednak warto szukać tego rodzaju rozwiązań, ponieważ ich zalety przewyższają pierwotne komplikacje.

Przedmiotem niniejszej rozprawy jest przedstawienie naprężeniowego podejścia metody elementów skończonych w zagadnieniu zginania cienkiej płyty Kirchhoffa. W tym zakresie analizy konstrukcji opracowano wiele różnych elementów skończonych, jednak większość z nich jest oparta na sformułowaniach przemieszczeniowych, mieszanych lub hybrydowych. W pracy zawarto opis podejścia naprężeniowego, u którego podstaw leży zasada minimum energii komplementarnej. Równania równowagi płyty spełniono poprzez wprowadzenie funkcji naprężeń Southwella [136], za pomocą których wyrażone zostały momenty zginające i skręcające. Możliwość zastosowania takiego rozwiązania została wspomniana przez Zienkiewicza i Fraeijs de Veubeke [48], a pierwsze próby uzyskania modelu naprężeniowego w przypadku płyt zostały przedstawione przez Eliasa [41] oraz Morleya [109],[110].

Podstawowa część pracy obejmuje wprowadzenie naprężeniowego podejścia do metody elementów skończonych do analizy statyki cienkiej płyty Kirchhoffa. Funkcje Southwella aproksymowano przy użyciu liniowych i kwadratowych funkcji kształtu. W tym celu wykorzystano dwa rodzaje elementów (3-węzłowy oraz 6-węzłowy trójkąt). Warunki brzegowe, które w przypadku podejścia naprężeniowego przyjmują postać liniowych kombinacji stopni swobody (funkcji Southwella), zostały spełnione za pomocą mnożników Lagrange'a. Mnożniki pełnią rolę stopni swobody w dwóch rodzajach elementów. W pierwszym przypadku są to specjalnie wprowadzone elementy brzegowe (elementy MPC - *multi point constraints*), które służą do definiowania konkretnych wartości obciążeń na krawędzi płyty: momentu zginającego o wektorze równoległym do brzegu oraz zredukowanej siły poprzecznej. W drugim przypadku mnożniki wprowadzono jako dodatkowe stopnie swobody w narożnikach elementów trójkątnych. Ich celem jest zapewnienie równowagi

sił pionowych w węzłach narożnych. Dodatkowo przedstawiono inną możliwość spełnienia warunków naprężeniowych na swobodnej krawędzi płyty. Jest ona równoważna zastosowaniu metody funkcji kary.

Pole przemieszczeń znaleziono wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów. Punktem wyjścia do tego podejścia są krzywizny w punktach Gaussa wyznaczone na podstawie naprężeń obliczonych metodą elementów skończonych i związków konstytutywnych. Następnie płytę można zdyskretyzować używając elementów Bognera-Foxa-Schmita (BFS) [17]. W punktach całkowania łatwo jest wyznaczyć krzywizny płyty, które tym razem zależą od nieznanymi stopni swobody w węzłach siatki elementów BFS. Następnie należy zminimalizować funkcjonal zawierający kwadraty różnic między krzywiznami wyznaczonymi na dwa sposoby, co pozwala obliczyć stopnie swobody elementów BFS. Znając te parametry i funkcje kształtu elementów BFS uzyskuje się przybliżone pole przemieszczeń. Część rozprawy została poświęcona oszacowaniu błędu *a posteriori* rozwiązania przybliżonego. Analizę przeprowadzono metodą Pragera-Synge'a [125] [140], która wykorzystuje statycznie i kinematycznie dopuszczalne rozwiązania uzyskane przy użyciu metody naprężeniowej i przemieszczeniowej. W pracy obliczono dolne i górne granice błędu rozwiązania przybliżonego. Uzyskane wyniki są satysfakcjonujące.

Po szczegółowym opisie zastosowanych metod zamieszczono wyniki obliczeń przeprowadzonych w celu oceny modelu (w przypadku płyt izotropowych i ortotropowych). Otrzymane rezultaty porównano z rozwiązaniami kinematycznie dopuszczalnymi (przy użyciu dwóch elementów trójkątnych Hsieh-Clougha-Tochera [28] – trój- i sześciowęzłowego). Zaobserwowano podobną szybkość zbieżności obu metod, co pokazuje konkurencyjność ujęcia naprężeniowego w stosunku do istniejących podejść.

Do istotnych zalet naprężeniowej metody elementów skończonych można zaliczyć:

- możliwość zastosowania wielomianów interpolacyjnych niskiego stopnia (funkcji liniowych) przy zachowaniu zbieżności do rozwiązania dokładnego. Jest to niemożliwe w przypadku metody przemieszczeniowej, gdzie wymagane są funkcje kwadratowe dla najprostszego elementu niedostosowanego i wielomiany trzeciego stopnia dla elementów dostosowanych,
- zwiększenie bezpieczeństwa konstrukcji dzięki możliwości znalezienia dolnego oszacowania obciążenia granicznego,
- łatwość wyznaczenia obustronnych granic energii wewnętrznej płyty w przypadku zastosowania dualnych podejść metody elementów skończonych,
- możliwość oszacowania błędu rozwiązania przybliżonego, jeżeli dysponujemy rozwiązaniami kinematycznie oraz statycznie dopuszczalnymi.

Warto również podkreślić zalety dualnej analizy zagadnienia zginania cienkiej płyty. Obie metody (kinematycznie i statycznie dopuszczalna) charakteryzuje monotoniczna zbieżność do rozwiązania dokładnego dzięki czemu dysponujemy dolną i górną granicą energii sprężystej płyty. To gwarantuje nam, że w przypadku zmniejszania się różnicy między tymi wartościami podczas zagęszczania siatki elementów skończonych zbliżamy się do rozwiązania dokładnego.